الموضوع الثاني:

التمرين الاول : (04 نقط)

I- a ، b و c أعداد طبيعية حيث : $1 \le a \le b \le c$

عين الأعداد a ، b و c علما أن في النظام ذي الأساس a يكون $b+c=\overline{46}$ و $bc=\overline{545}$.

II- نعتبر المعادلة $21x-17y=8$ ....(1) ، حيث x و y عددين صحيحين طبيعيين .

1. أ) عين الثنائية $(x_0;x_0)$ حل للمعادلة (1) .

ب) حل في $\mathbb{N}^2$ المعادلة (1) .

2. أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على 13 .

ب) بين أنه إذا كان $(\alpha;\beta)$ حل للمعادلة (1) فإن $3^{34\beta+20}-9^{21\alpha}-2\equiv 0[13]$.

3 . أ) بين أنه إذا كان $(x;y)$ حل للمعادلة (1) و $x\equiv 0[4]$ فإن $y\equiv 0[4]$.

ب) عين $(x;y)$ حلول للمعادلة (1) التي يكون من أجلها $PGCD(x;y)=4$

التمرين الثاني: (05 نقط)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$. لتكن النقط A,B,C,D,H التي لواحقها على الترتيب :

$$Z_H=1+Z_D\ ,\ Z_D=-\frac{1}{a}i\ ,\quad Z_C=ia\quad ,\ Z_B=1+\frac{a-1}{a}i\ ,\ Z_A=a$$

حيث a عدد حقيقي موجب تماما ويختلف عن 1 .

1) أ - تحقق أن : $Z_B-Z_D=\overline{Z_D}(Z_A-Z_C)$

ب- أستنتج أن المستقيمين (AC) و (BD) متعامدان .

2) أ – عين الكتابة المركبة للتشابه المباشر S الذي يحول A إلى B ويحول C إلى D .

ب- حدد Z_Ω لاحقة المركز Ω للتحويل S. ثم عين العناصر المميزة الأخرى لهذا التحويل .

ج – بين أن المثلثين OAC و BHD متشابهان ثم جد علاقة بين مساحتيهما .

3) لتكن (M_n) متتالية نقط من المستوي معرفة كما يلي : $M_0=A$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $M_{n+1}=S(M_n)$

حيث Z_n لاحقة النقطة M_n ونضع : $U_n=|Z_n-Z_\Omega|$ من أجل كل عدد طبيعي n .

أ- بين أن (U_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب- عين قيم a بحيث تكون (U_n) متتالية متقاربة .

جـ - نرمز بـ T_n إلى مجموعة أطوال القطع المستقيمة $[M_{n+1}\Omega],[M_n\Omega],..........,[A\Omega]$. أحسب المجموع T_n بدلالة n.

4)لتكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة Z التي تحقق : $Z=a(1+e^{i\theta})$ حيث $\theta\in R$.

* حدد الطبيعة والعناصر المميزة للمجموعة (Γ) لما يمسح العدد θ المجموعة R.

Nafouz

التمرين الثالث : (04 نقط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نعتبر النقط : $A(3;2;1)$, $B(3;5;4)$, $C(0;5;1)$

1- بين أن المثلث ABC متقايس الاضلاع .
2- تحقق أن الشعاع $\vec{n}(1;1;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) ،ثم استنتج معادلة ديكارتية له.
3- أ) .عين إحداثيات النقطة G مركز ثقل المثلث ABC .
ب). عين تمثيلا وسيطيا لـلمستقيم (Δ) الذي يمر بالنقطة G ويعامد المستوي (ABC) .

جـ).نعتبر النقطة $S(2+t;4+t;2-t)$ حيث t عدد حقيقي .عين العدد t حتى يكون $AS^2=AB^2$.

4-أ).عين طبيعة رباعي الوجوه $FABC$ حيث $F(4;6;0)$ ثم أحسب حجمه V.

ب).بين أن المستقيمين (FA) و (BC) متعامدان .

جـ).لتكن (S) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MF}\right\|=6$

بين أن المستوي (ABC) يقطع (S) وفق دائرة محيطة بالمثلث ABC يطلب مركزها وطول نصف قطرها .

التمرين الرابع :(07 نقط)

I- بين أن $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$.

II- نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1. أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\geq 1$ ، $f(x)=\ln x+\ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)$

ب) من أجل $x\geq 1$ ،بين أن $x-1=\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\left(x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)$

جـ) بين أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند1.فسر النتيجة بيانيا.

2. أ) أحسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$.

ب) بين أنه كل من أجل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ ،ثم شكل جدول تغير الدالة f .

جـ) أرسم المنحى (C_f) .

3. ليكن S مساحة الحيز D المنحى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=3$
A و B نقطتان من (C_f) فاصلتهما على الترتيب 1و3 ، والنقطتان $p(1;2\ln(1+\sqrt{2}))$ و $Q(3;0)$ من المستوي .

أ) أحسب مساحة كل من المستطيل $APBQ$ و المثلث ABQ .

ب) أستنتج أن $2\ln(1+\sqrt{2})\leq S\leq 4\ln(1+\sqrt{2})$. (ملاحظة $\left((1+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{2}\right)$) .

III- نعتبرالدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=\frac{e^{2x}+1}{2e^x}$ و (C_g) تمثيلها البياني.

1. بين أنه كل من أجل عدد حقيقي $x \geq 0$: $g(x) \geq 1$.
2. أ) بين أن $g \circ f(x) = x$.ثم بين أنه إذا كانت $M(x;y)$ نقطة من (C_f) فان $M^{/}(x;y)$ نقطة من (C_g) .
ب) ماذ تستنتج بالنسبة للمنحنيين (C_f) و (C_g) ؟أرسم المنحنى في المعلم السابق (C_g).

3. ليكن $S^{/}$ مساحة الحيز $D^{/}$ المحدد بالمنحنى (C_g) والمستقيمات التي معادلاتها $x = 0$ ، $x = 2\ln(1+\sqrt{2})$ و $y = 3$.

أ) بين أن $S^{/} = 6\ln(1+\sqrt{2}) - \int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})} g(x)dx$

ب) أحسب $\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})} g(x)dx$ ثم أستنتج قيمة S .

التنقيـــط		الأجــــــــوبـــــــــة	الوحدات
		التمرين الأول:	الموافقة و التعداد
		/I b و c هما حلا المعادلة : $x^2-2(2a+3)x+5a^2+4a+5=0$	
	0.25	$\Delta = 4(-a^2+8a+4)$	
	0.50	$\Delta \ge 0$ يكافئ $a \in \left[2-\sqrt{20};2+\sqrt{20}\right]$ ، $a=7$ أو $a=8$	
		$a=7$ فإن $\Delta = 11$ (مرفوض)	
		$a=8$ الحلان هما 17 و21. ($a=8$ ، $b=17$ ، $c=21$)	
	0.25	II /1- (أ)- $(x_0;y_0)=(2,2)$.	
	0.25	(ب)- $s=\{(17k+2,21k+2), k\in \mathbb{N}\}$.	
	0.50	2 – (أ)- $9^{3k+r}\equiv 9^r[3]$ حيث. $r \in \{0,1,2\}$.	
	0.50	بوقي قسمة 9^n على 13 هي 9 3 9 1 .	
		(ب) - $3^{34\beta+20}-9^{21\alpha}-2 \equiv 9^{21\alpha+2}-9^{21\alpha}-2[13]$	
	0.50	$\equiv 0[13]$	
		3-(أ)- $\begin{cases}17y=4(21\lambda-2)\\ x=4\lambda\end{cases}$ خسب غوص فإن $y\equiv 0[4]$.	
	0.50	ب)- $x \equiv 0[4]$ يعني $k=4k'+2$	
		$x \equiv 0[8]$ يعني $k=4l+6$	
		$k=4(2l+1)+2$ ، و $k' \ne 2l$ وعليه $k'=2l$.	
		$k=8l+2$.	
		$x=136l+36$ و $y=168l+44$ حيث $l \in N$.	
	0.25		
	2×0.25		

	0.25 0.25 0.50 0.75 0.75 0.50 0.50 2× 0.25 0.50 0.50 0.50	**التمرين الثاني:** **1) - أ – محققة .** **ب-** $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{DB})=\frac{\pi}{2}[2\pi]$ **(محققة) .** **2- أ -** $z' = \frac{1}{a}iz + 1 - \frac{1}{a}i$ **- ب -** $z_\Omega = 1$ ، $k=\frac{1}{a}$ ، $\theta=\frac{\pi}{2}$ **- جـ -** $S(A)=B$ ، $S(C)=D$ ، $S(O)=H$ **صورة المثلث** OAC **ب** S **هو المثلث** BHD **و** S **تشابه مباشر ،المثلثان** OAC **و** BHD **متشابهان .** $S(BHD)=\frac{1}{a^2}S(OAC)$ **.** **3 – أ -:** $u_{n+1}=\frac{1}{a}u_n$ **.** (v_n) **متتالية هندسيةأساسها** $q=\frac{1}{a}$ **وحدها الاول** $u_0=\|a-1\|$ **.** **ب-** $a\in]1;+\infty[$ **جـ -** $T_n=\frac{a\|a-1\|}{a-1}\left[1-\left(\frac{1}{a}\right)^{n+2}\right]$ **4 -** (Γ) **دائرة مركزها** A **ذات الاحقة** a **وطول نصف قطرها** $r=a$	**الأعداد المركبة**

الهندسة الفضائية

التمرين الثالث:

0.75 1-المثلث ABC متقايس الاظلاع الان $AB = AC = BC = 3\sqrt{2}$

0.50 2-$\vec{n}(1,1,-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) لان $\overrightarrow{AB}.\vec{n} = 0$ و $\overrightarrow{AC}.\vec{n} = 0$.

و $M(x,y;z) \in (ABC)$ معناه : $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$

0.25 معادلة لـ (ABC) : $x + y - z - 4 = 0$

0.25 3- أ – G مركز ثقل المثلث ABC ، و $G(2,4,2)$ . ...

ب - $M(x,y;z) \in (\Delta)$ يكافئ $\begin{cases} x = 2 + k \\ y = 4 + k \quad (k \in R) \\ z = 2 - k \end{cases}$

0.25

جـ - لاحظ أن S نقطة من (Δ)

$AS^2 = AB^2$ يكافئ $3t^2 = 12$ حيث $t \in \{-2,2\}$ ومنه $S(4;6;0)$ أو $S(0;2;4)$

0.25 د – F تنتمي الى (Δ) ومنه المثلثات FGA ، FGB ، FGC قائمة ومتقايسة لان

$GA = GB = GC$ ومنه $FA = FB = FC = AB$.

رباعي الوجوه $FABC$ منتظم . $V = \frac{1}{3} S_{ABC} \times FG$ و

0.25 $V = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}AB^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times FG$ ....

لاحظ : $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB^2 \sin(\frac{\pi}{3})$ و منه $V = 9u.v$.

0.25 4- $\overrightarrow{FA}.\overrightarrow{BC} = 0$ ومنه (FA) و (BC) متعامدان.

5 أ - $\left\|\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MF}\right\| = 6$ تكافئ $MI = 3$ حيث I منتصف $[FG]$.

المجموعة (S) هي سطح الكرة التي مركزها I وطول نصف قطرها 3.

ب – بمأن $I \in (\Delta)$ فإن : $IG = d(AB, I) = \sqrt{3}$.

0.25 المجموعة (S) **والمستوي** (ABC) يتقاطعان في دائرة مركزه G

وطول نصف قطرها $r = \sqrt{6}$.

0.25

0.25 متوسط المثلث متقايس الاظلاع ABC يساوي $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ وعليه $AG = \frac{2}{3}\left(\frac{2\sqrt{6}}{2}\right) = \sqrt{6}$

المجموعة (S) **والمستوي** (ABC) يتقاطعان في دائرة محيطة بالمثلث ABC .

التمرين الرابع :

I- $\lim_{x\to1}\frac{\ln x-\ln 1}{x-1}=1$ الدالة " $\ln$ " قابلة للاشتقاق عند 1 وعليه $\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=1$. 0.50

بوضع $z=x-1$ فإن $\lim_{x\to0}\frac{\ln(z+1)}{z}=1$.

II 1- أ –محققة من أجل $x\geq1$ 0.25

ب – محققة من أجل $x\geq1$. 0.25

جـ – $\lim_{x\to1}\left[\frac{\ln x}{x-1}+\frac{\ln\left[1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right]}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}+\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right]=+\infty$.

المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس موازي لمحور التراتيب عند النقطة التي فاصلتها 1. 0.25

2- أ / $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ 0.25

ب / $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ 0.25

x	1 $\quad\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	0 $\nearrow$ $+\infty$

0.50

جـ/ البيان : 0.50

0.50

لدالة الأسية و اللوغار

0.25

ب / المستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i};\vec{j})$ فإن (C_f) و (C_g) متناظران

بالنسبةالى المنصف الاول ((Δ) : $y=x$)

01

3 أ / $S' = \int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})} \left[3-g(x)\right]d(x)$

$$S' = \left[3x\right]_0^{2\ln(1+\sqrt{2})} - \int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})} g(x)d(x)$$

$$S' = 6\ln(1+\sqrt{2}) - \int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})} g(x)d(x)$$

ب/ $\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})} g(x)d(x) = \int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})} \frac{1}{2}\left[e^x+e^{-x}\right]d(x)$

$$= \frac{1}{2}\left[e^x - e^{-x}\right]_0^{2\ln(1+}$$

$$= 2\sqrt{2}$$

بمأن (C_f) و (C_g) متناظران بالنسبةالى المنصف الاول $\Delta = \Delta'$ ومنه $S = S'$

0.50

$$S = S' = \left|6\ln(1+\sqrt{2}) - 2\sqrt{2}\right| \ u.v$$

0.25

0.50